نظرية تمثيل ستون:

لتكن A حلقة بوليانية ولتكن X مجموعة المرشحات في A لنعرف σ تطبيق من A في P(X) معرف بالشكل التالي:

نفرض أن $x \in A$ فإن $\sigma(x) = \{u \in X ; x \in u\}$

توضح العبارة ... المجموعات التي مرشحات التي تحوي x التي هي من المطلوب

نظرية ستون:

كل حلقة بوليانية تكون إيزومورفية مع أسرة المجموعات والشكل أدناه σ يكون مونومورفيزم بولياني

البرهان:

لنبرهن أولاً أن σ هومومورفيزم بولياني

$$\sigma : A \longrightarrow P(X)$$

$$x \longmapsto \sigma(x) = \{u_i \in X ; x \in u_i\}$$

$$\forall x, y \in A ; \sigma(xy) = \{u_i \in X ; xy \in u_i\}$$

$$= \{u_i \in X ; x \in u_i \cap y \in u_i\}$$

$$= \{u_i \in X ; x \in u_i\} \cap \{u_i \in X ; y \in u_i\}$$

$$= \sigma(x) \cap \sigma(y)$$

$$\sigma(x') = \{u_i \in X ; x' \in u_i\} = \{u_i \in X ; x \notin u_i\} = C\{u_i \in X ; x \in u_i\}$$

$$= C\sigma(x)$$

وبالتالي σ هومومورفيزم بولياني

لنبرهن أن σ متباين بفرض أن $x, y \in A$ بحيث أن $\sigma(x) = \sigma(y)$

$$\sigma(x) + \sigma(y) = \sigma(x+y) = \phi$$

$$\Rightarrow (\sigma(x+y))' = X \qquad \text{لأننا نتكلم بـ } P(X)$$

$$\Rightarrow \sigma(x+y)' = X \Rightarrow (x+y)' = 1 \Rightarrow x+y = 0$$

$$\Rightarrow x = y$$

ومنه نستنتج أن σ مونومورفيزم بولياني وبالتالي فإن A تكون إيزومورفية مع σ(A) والتي هي حلقة بوليانية جزئية من P(X) فندعو σ (أو σ_A إذا لزم التعيين)

~~مبادئ جبرية A~~ ايزومورفيزم ستون بالنسبة إلى A

ملاحظة:

إن نظرية ستون جوهرية أكثر مما إذ يمكن أن نأخذ X مجموعة المثاليات العظمى (أو الأولية) في A ونعرف σ بالشكل التالي

$\sigma(x) = \{ I \in X ; x \notin I \}$

إن σ يكون مونومورفيزم بوليانيًا

وإذا كانت A منتهية فإن مونومورفيزم ستون يتمتع بشروط إضافية

مبرهنة:

إذا كانت A حلقة بوليانية منتهية فإن σ يكون تامًا أي أن A تكون ايزومورفية مع $P(X)$

البرهان:

لتكن A منتهية وبالتالي فإن X تكون أيضًا منتهية. لتكن $Y \in P(X)$

- إذا كانت $Y = \phi$ عندئذ فإن $\phi = \sigma(0)$ ففي هذه الحالة يكون σ تامًا
- إذا كانت $Y \neq \phi$ ونرمز لها $Y = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ ولتكن $f = u_1 \cap u_2 \cap \dots \cap u_k$ فإن f تكون رئيسية في A وبالتالي فهي أساسية ونفرض أن $f = f_a$ ونبرهن أن $Y = \sigma(a)$

- $\forall u_i \in Y$ فإن $f \subseteq u_i$ وبالتالي $a \in f_a$ ~~أي~~ $a \in u_i$ وذلك $u_i \in \sigma(a)$ ~~[illegible]~~ ومنه فإن $Y \subseteq \sigma(a)$

- لتكن $u \in \sigma(a) \Leftarrow a \in u \Leftarrow f_a = f \subseteq u$ لنفرض جدلًا أن $u \neq u_i$ وذلك $\forall i$ فإن $u_i \not\subseteq u$ من أجل أي i (لأن u_i أعظمية) ⇐ يوجد من أجل x_i بحيث يكون $x_i \in u_i$ & $x_i \notin u$ فإذا أخذنا $x = x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_k$ من أجل أي i فإن $x \geq x_i \Leftarrow x \in f \Leftarrow x \in u$ (لأن $f \subseteq u$)

أي أن $x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_k \in u$ & $x_i \notin u$ $\forall i$ وبما أن u أولية (لأنه عنصر في حلقة بوليانية)

$u_1 \not\subseteq u$
$x_1 \in u_1$ & $x_1 \notin u$
$u_2 \not\subseteq u$
$x_1 \in u_2$ & $x_2 \notin u$.

محاضرات الدفتر

القسم :　　　　السنة :　　　　المادة :　　　　المحاضرة :

فرضا تناقض وبالتالي فإن u هو واحد من u_i أي أن $u \in X$ وبالتالي $X \subseteq (a)$ ومن الاحتوائين تتبع المساواة وبالتالي فإنه في جميع الحالات من أجل العنصر X من الجبر أوجدنا عنصر من المجموعة بحيث تكون صورته تساوي ذلك العنصر في الجبر

نتائج :

① عدد عناصر حلقة بوليانية منتهية A يكون من الشكل 2^n حيث n عدد مولد الرشيقات

أمثلة :

$D(6)$ من أربعة عناصر وبالتالي عدد مولده (رشيقات) هو 2

$D(8)$ من ثمانية عناصر وبالتالي عدد مولد الرشيقات هو 3

$D(210)$ من ستة عشر عنصر وبالتالي عدد مولد الرشيقات هو 4

② جميع الحلقات البوليانية المنتهية التي لها نفس عدد العناصر تكون إيزومورفية فيما بينها وإيزومورفية مع $P(X)$ حيث X مجموعة مؤلفة من n عنصر

③ من أجل العدد الطبيعي $n \geq 1$ توجد حلقات بوليانية تملك 2^n عنصراً و n مولد مرشقة

مثال : $n = 2$ 　 $X = \{a, b\}$ 　 $P(X) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, X\}$

الجوار تعد الرشيقات $\{\{a\}, X\}$ 　 $\{\{b\}, X\}$

إن العنصر الوحيد أن ينتهي لمولد الرشيقات والواحد هو X .

تعريف :

ليكن A جبر بولياني لنعرف أن الحلقتين الجديدتين

$x \longleftrightarrow y = (x \longrightarrow y)(y \longrightarrow x)$ 　 $x \longrightarrow y = x' \vee y$

a) برهن أن $x \leq y$ إذا $x \longrightarrow y = 1$

$x = y$ 　 $x \longleftrightarrow y = y$

$(x + y)' = x \longleftrightarrow y$

محاضرات الدفتر

القسم :　　　السنة :　　　المادة :　　　المحاضرة :

ط) إذا أخذنا المجموعة المؤلفة من 6 عمليات (↔ , → , ` , ∨ , ∘ , +) أوجد من المجموعة عشرة أزواج من العمليات السابقة أنوزدا التي تعرف الـ 6 عمليات المذكورة سابقاً